

MODELIZACIÓN ESPACIAL DE PRECIPITACIONES EXTREMAS.

Leonardo Moreno ¹
mrleo@iesta.edu.uy

RESUMEN

Un tema de actualidad y de vigente interés en gran parte de la sociedad son los eventos extremos climáticos, debido al gran impacto que estos provocan sobre la población y la economía. El estudio de eventos extremos multivariados, es un tema abierto, y de actual desarrollo, (de Haan & Ferreira 2006), si bien en el trabajo se aplican estos conceptos a cierto fenómeno climático, las precipitaciones, el modelado de eventos extremos multivariados tiene aplicaciones en diversas ramas de las ciencias. En particular el objeto de interés son las precipitaciones extremas en Guanajuato, Estado de México. Por tanto, se tiene por finalidad entender y modelar los valores de las precipitaciones máximas en una determinada región del Estado.

A partir de los valores de precipitaciones en un conjunto de estaciones meteorológicas, el objetivo es captar la estructura de dependencia entre los valores extremos. El estudio se basa en los trabajos realizados por Boldi y Davison, (Davison & Boldi 2007), y por Sabourin y Naveau, (Sabourin & Naveau 2013).

Puesto que la información sobre la estructura de dependencia está contenida en la medida espectral o también llamada angular, una aproximación semi-paramétrica de dicha medida es dada mediante una mezcla de distribuciones de Dirichlet. A nivel práctico dicho enfoque presenta algunos inconvenientes, en particular la lenta convergencia al aumentar la dimensión del espacio, por tanto en el trabajo se utiliza para modelar fenómenos locales.

Un problema que se presenta en este punto es la estimación de los parámetros de la mezcla de Dirichlet, se aborda esta dificultad bajo un enfoque bayesiano. El inconveniente radica en generar el vector de parámetros de forma que se cumplan las restricciones necesarias, por tanto se plantea una reparametrización del espacio paramétrico sin restricciones, usando la metodología propuesta por Sabourin y Naveau en el 2013. Se obtiene la distribución predictiva a posteriori.

Palabras clave: *Distribución de dirichlet, medida angular, extremos multivariados, estadística bayesiana.*

1 Introducción

Grandes sectores industriales y financieros, especialmente sensibles a eventos ambientales extremos, adolecen en general de un conocimiento confiable sobre la ocurrencia de dichos fenómenos y les es imprescindible asignarles ciertas probabilidades de ocurrencia. Por ejemplo, un problema frecuente es el diseño de estructuras que deben resistir algún fenómeno ambiental. Si el fenómeno es muy intenso, la estructura fallará, por lo tanto es necesario diseñarla de modo que la probabilidad de falla sea pequeña, evitando tanto el subdiseño como el sobrediseño. En consecuencia existe una elevada demanda de investigación estadística seria sobre el hecho, lo que se ha traducido a que cierto sector de la comunidad estadística produzca avances significativos sobre la modelación de dichos eventos extremos, lo que se manifiesta en el gran número de publicaciones referentes al tema en la última década.

Son conocidos modelos espacio-temporales para establecer el nivel promedio de un caudal o de la caída de lluvia en una determinada región y un período de tiempo dado, (Bras &

¹Instituto de Estadística

Rodriguez-Iturbe 1994), pero muchas veces es necesario modelar las lluvias extremas, o sea la cola de la distribución. Si bien los procesos gaussianos juegan un papel preponderante en lo que se refiere a la modelación de datos espaciales, no son un camino apropiado para el ajuste de las colas de la distribución. Por otro lado, en el estudio de eventos extremos espaciales muchos conceptos dentro de la Geoestadística deben ser reformulados, por ejemplo el Variograma necesita que el momento de segundo orden sea finito, lo cual no sucede en las distribuciones de valores extremos.

Como se busca estimar la cola de la distribución, ver figura 1, bases de datos de gran tamaño y de una alta precisión son necesarias. Por definición encontramos pocas observaciones extremas en la muestra, las técnicas usuales de estimación de densidad funcionan de forma eficiente en aquellas zonas donde hay una alta agrupación de observaciones, sin embargo con frecuencia se quiere estimar valores que van más allá del último valor de la muestra, por tanto es necesario que se cumplan ciertas condiciones para poder extrapolar información. Una excelente aproximación al estado del arte de la modelación espacio-temporal de valores extremos mediante diferentes enfoques (procesos máx-estables, cópulas, variables latentes) es brindada por Davison, Padoan y Ribatet, (Davison, Padoan & Ribatet 2012).

Si bien, se realiza modelaciones multivariadas en dimensiones pequeñas a través de la medida espectral, es posible realizar el ajuste en dimensión infinita a través de los procesos máx-estables. Los procesos máx-estables brindan una solución parcial al tema, con bondadosas cualidades, pero como indica M. Schlather nada sencilla y algo arbitraria, por tanto el problema a nivel teórico sigue abierto. Recientes publicaciones en el 2013, ver (Kluppelberg, Steinkohl & Davis 2013), muestran los últimos avances respecto a la inferencia mediante procesos máx-estables. Ribatet, (Ribatet 2013), expone la estrecha relación de las distribuciones finito dimensionales de los procesos máx-estables con las cópulas extremas. Como suele suceder la complejidad de la naturaleza supera la flexibilidad de los modelos, por tanto muchos supuestos a priori son necesarios, estacionariedad en el tiempo y en el espacio, independencia o alguna condición mixing en el tiempo, son algunas de las restricciones pedidas.

La no estacionariedad espacial de las precipitaciones en Guanajuato es una argumento plausible para optar por estudios locales. Siguiendo este camino se seleccionan valores pluviales de tres estaciones meteorológicas cercanas al Municipio de León.

Se transforman las coordenadas cartesianas del vector $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ a coordenadas pseudo-polares,

$$R = X_1 + \dots + X_n \quad y \quad W = (X_1/R, \dots, X_n/R)^t, \quad (1)$$

llamadas radio y vector angular respectivamente, donde esta última vive en el simplex unitario,

$$S_d = \{w : w_1 + \dots + w_d = 1, w_i > 0\}, \quad (2)$$

Transformando las marginales a Fréchet unitarias, se prueba que bajo ciertas condiciones débiles,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(W \in B/R > r) = H(B), \quad (3)$$

H es una medida, llamada medida angular o espectral, definida en S_d que verifica las siguientes restricciones,

$$\int_{S_d} w_i dH(w) = 1/d \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (4)$$

La medida espectral se encuentra relacionada con una medida ν por,

$$d\nu = \frac{1}{r^2} dr dH, \quad (5)$$

siendo ν una medida homogénea de orden -1 , es decir

$$\nu(tA) = t^{-1} \nu(A), \quad \forall A \in E = [0, \infty]^d - \{0\} \quad (6)$$

y si A es relativamente compacto en E se cumple que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP \left(\frac{X}{n} \in A \right) = \nu(A) \quad (7)$$

Esto último permite modelar, a través de la distribución asintótica, los excesos sobre diferentes umbrales.

En los capítulos 2 y 3 subsiguientes se introducen las bases teóricas de los extremos univariados y multivariados respectivamente. En el capítulo 4 se modela la medida angular a través de una mezcla de distribuciones de Dirichlet y se reparametriza el problema. En la modelización, puesto que se considera un enfoque Bayesiano, distribuciones a priori para los parámetros son propuestas. El capítulo 5 describe el algoritmo mediante el cual se obtienen simulaciones de la distribución a posteriori y por último, en los capítulos 6 y 7, se obtienen resultados referentes a la base de datos reales mediante simulación de la distribución predictiva a posteriori.

Algunos estudios sobre precipitaciones extremas ya han sido desarrollados en Guanajuato, ver (González 2011) y (Quintero 2010), se desconoce el uso de dichas herramientas estadísticas en datos pluviales del territorio Uruguayo.

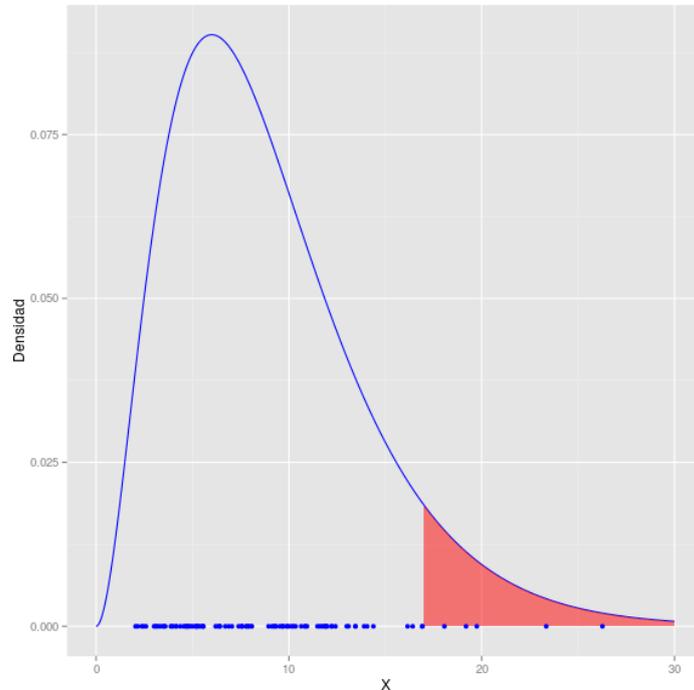


Figura 1: Interesan aquellos datos que se encuentran sobre la cola de la distribución.

2 Extremos Univariados

La teoría de valores extremos se ha desarrollado básicamente en las últimas tres décadas, donde se ha concebido el rigor matemático necesario. Las aplicaciones de dicha teoría abarcan diversas ramas de las ciencias, la ingeniería, la oceanografía, el medio ambiente, la hidrología, la climatología, las finanzas, por citar algunas.

2.1 Generalidades.

Dada una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots i.i.d y sea M_n la v.a máximo de las primeras n variables aleatorias, es decir,

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \quad (8)$$

Es sencillo observar que,

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = F^n(x), \quad (9)$$

siendo $F(x)$ la función de distribución acumulada de X_1 .

En general la distribución F no es conocida, por tanto tampoco lo es la distribución del máximo, por ello se buscan aproximaciones asintóticas. Se anotan los extremos del soporte de la variable X_1 como,

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\} \quad \text{y} \quad \omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Es evidente que $P(M_n \leq x) = F^n(x)$ converge en distribución a la constante $\omega(F)$, por ser una constante también se cumple la convergencia en probabilidad y como la sucesión M_n es monótona se puede afirmar la convergencia casi segura. Para obtener una distribución asintótica no degenerada $G(x)$, al igual que en el Teorema Central del Límite, se busca una transformación del tipo $\frac{M_n - a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n dos sucesiones reales, de forma tal que $\frac{M_n - a_n}{b_n}$ converja en distribución a una variable no degenerada con distribución G cuando n tiende a infinito. Es decir, la pregunta a realizarse es, ¿existen y son únicas las sucesiones reales a_n y b_n que verifican lo antedicho?. Además, que se puede decir acerca de la distribución no degenerada G . Estas preguntas son contestadas parcialmente por el Teorema de Fisher-Tippet, (Tippett & Fisher 1928), cuya versión final es dada por Gnedenko, (Gnedenko 1943), que se enuncia a continuación.

Teorema 1 (Teorema de Fisher-Tippet.). *Dada una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ i.i.d tal que $X_1 \sim F$ y sea $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$. Si existen sucesiones reales $\{a_n\}_{n \geq 1}$ positiva y $\{b_n\}_{n \geq 1}$ que cumplen lo siguiente,*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x), \quad (10)$$

débilmente cuando $n \rightarrow +\infty$ donde G es propia y no degenerada. Entonces G pertenece a alguna de las siguientes tres familias de distribuciones,

- *Tipo 1 o distribución Gumbel.*

$$H(x; \lambda, \delta) = \exp\left\{-\exp\left[\frac{\lambda - x}{\delta}\right]\right\}, \quad \delta > 0.$$

- Tipo 2 o distribución Fréchet.

$$H(x; \lambda, \delta, \kappa) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[\frac{x-\lambda}{\delta} \right]^{-1/\kappa} \right\} & \text{si } x \geq \lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \delta > 0, \kappa > 0.$$

- Tipo 3 o distribución Weibull.

$$H(x; \lambda, \delta, \kappa) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[\frac{\lambda-x}{\delta} \right]^{-1/\kappa} \right\} & \text{si } x \leq \lambda \\ 0 & \text{si } x > \lambda \end{cases} \quad \delta > 0, \kappa < 0.$$

Las tres distribuciones se pueden escribir en una sola expresión que recibe el nombre de *distribución de los valores extremos o distribución de Jenkinson-Von Misses*, se abrevia DVE o también DGVE,

$$H(x; \lambda, \delta, \kappa) = \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x-\lambda}{\delta} \right) \right]_+^{-1/\kappa} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \delta > 0, \kappa \neq 0, \quad (11)$$

siendo la función $y_+(t) = \max\{0, y(t)\}$. Se llama a λ el parámetro de posición, a δ el de escala o dispersión y κ es el llamado parámetro de forma o índice de valores extremos. El signo de este último indica cual de las tres posibles es la distribución de la DVE,

- Si $\kappa > 0$, tiene una distribución de Fréchet.
- Si $\kappa < 0$, tiene una distribución de Weibull.
- Si $\kappa = 0$ ($\kappa \rightarrow 0$) tiene una distribución de Gumbel.

Observar que este teorema no brinda información acerca de la existencia de la sucesiones a_n y b_n , ver (Coles 2001) . En la figura 2 se pueden apreciar diferentes densidades de DVE al variar el parámetro de forma.

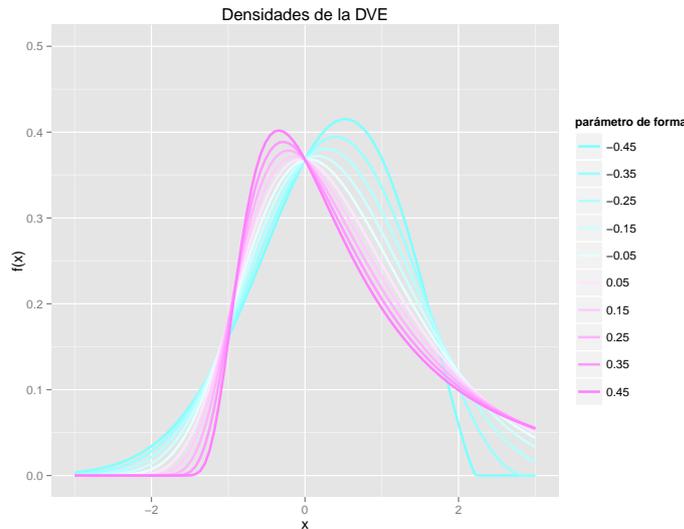


Figura 2: Densidad de la DVEG al variar el parámetro de forma, $\mu = 0$ y $\delta = 1$.

A partir de la siguiente propiedad se puede transformar cualquier DVE en un distribución Fréchet unitaria, es decir en una variable con distribución acumulada,

$$H(x; 0, 1, 1) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (12)$$

Propiedad 1 (Transformaciones de la DVE.). *Las siguientes relaciones son equivalentes,*

- $X \sim \text{Frechet}(\lambda, \delta, \kappa)$.
- $\log X^\alpha \sim \text{Gumbel}(\lambda, \delta), \quad \delta = 1/\kappa$.
- $-X^{-1} \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta, \kappa)$.

2.2 Dominios de Atracción.

Definición 1 (Dominio de atracción.). *Dada una sucesión de variables aleatorias i.i.d $\{X_n\}_{n \geq 1}$, tal que $X_1 \sim F$ y $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Se dice que F está en el dominio de atracción de valor extremo H , se anota $F \in \mathcal{D}(H)$ si existen $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ que cumplen,*

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow H(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

2.3 Distribución Generalizada de Pareto

Sea $u < \omega_F$ un valor fijo, ha ocurrido una excedencia si $X > u$, se llama excedencia al valor de X y exceso a $X - u$. Anotamos,

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geq 0. \quad (14)$$

Se llama función media de excesos a $e(u) = E(X - u | X > u)$

Se define la Distribución Generalizada de Pareto (DGP), $H_{\xi, \beta}$ como,

$$H_{\xi, \beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad x \in D(\xi, \beta), \quad (15)$$

siendo

$$D(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } \xi \geq 0 \\ [0, -\beta/\xi] & \xi < 0 \end{cases}$$

2.3.1. Propiedades

1. Para $\xi \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{D}_\xi$ si y sólo si para alguna función β positiva se cumple que,

$$\lim_{u \uparrow \omega_F} \sup_{0 < x < \omega_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

Esto indica que la función de distribución de los excesos F_u se aproxima a una DGP cuando u es suficientemente grande.

2. Si $x_1, x_2 \in D(\xi, \beta)$, entonces

$$\frac{\bar{H}_{\xi, \beta}(x_1 + x_2)}{\bar{H}_{\xi, \beta}(x_1)} = \bar{H}_{\xi, \beta + \xi x_1}(x_2)$$

Es decir, la clase de la DGP es cerrada frente a cambios de umbral.

3. Si $X \sim DGP_{\xi, \beta}$ tal que $\xi < 1$. Entonces para $u < \omega_F$,

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi u > 0$$

Esta propiedad proporciona un método gráfico para la determinación de un umbral u adecuado para que la aproximación a una DGP sea eficiente.

Observación Si $X \in \mathcal{D}(G_{\xi, \mu, \sigma})$ entonces los excesos sobre un umbral tienen una distribución aproximada con igual parámetro de forma ξ , y

$$\beta = \sigma + \xi(u - \mu).$$

3 Extremos multivariados

Se introduce ahora la generalización de extremos al caso multivariado. Muchas de las propiedades ya vistas no son plausibles de generalización.

Definición 2 (Máximo Multivariado.). Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en dimensión k independientes e idénticamente distribuidas, sea anota $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k})$ a las variables marginales y F a la distribución conjunta. Se define el vector de máximos como,

$$M_n = (M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,k}) = \left(\max_{1 \leq i \leq n} X_{i,1}, \max_{1 \leq i \leq n} X_{i,2}, \dots, \max_{1 \leq i \leq n} X_{i,k} \right).$$

Definición 3 (Distribuciones de valores extremos multivariadas.). Se dice que H tiene una distribución de extremos multivariadas si existen dos sucesiones en \mathbb{R}^k , $\{a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,k}) > 0\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n = (b_{n,1}, \dots, b_{n,k})\}_{n \geq 1}$ tal que,

$$P \left\{ \frac{M_{n,1} - b_{n,1}}{a_{n,1}} \leq x_1, \dots, \frac{M_{n,k} - b_{n,k}}{a_{n,k}} \leq x_k \right\} \rightarrow H(x_1, \dots, x_k), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En este caso se dice que F esta en el dominio de atracción de H .

Definición 4 (Distribuciones máx-estables.). Dada una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots i.i.d tal que $X_1 \sim F$ (no degenerada). F es una distribución máx-estable si existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que,

$$\frac{\max_{i=1, \dots, n} \{X_i\} - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} X_1, \quad \forall n \geq 1. \quad (16)$$

Es decir, se puede realizar un cambio de posición y escala para que el máximo $M_n = \max_{i=1, \dots, n} \{X_i\}$ mantenga la misma distribución que la de las variables de la sucesión original. Puesto que $F_{M_n}(z) = F^n(z)$ la igualdad [16] es equivalente a,

$$F^n(a_n z + b_n) = F(z), \quad \forall n. \quad (17)$$

El teorema siguiente determina que las distribuciones máx-estables caracterizan a las DVE.

Teorema 2 (Caracterización de la distribuciones de valores extremos.). *Un distribución es máx-estable si y sólo si es una distribución de valores extremos.*

Teorema 3 (Caracterización Espectral). *Sea $E = [0, \infty)^d \setminus \{0\}$, $\|\cdot\|$ la norma suma, y S_d el simplex unitario en E . Una d -dimensional función de distribución G es una distribución de valores extremos multivariada con marginales Fréchet unitaria si y sólo si,*

1. *Existe una medida Finita H en S_d que cumple,*

$$\int_{S_d} \omega_j dH(\omega) = 1/d, \quad \forall j = 1, \dots, d,$$

tal que,

$$G(x) = e^{-V(x)}, \quad x \in E,$$

$$\text{con } V(x) = \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} \frac{\omega_j}{x_j} dH(\omega).$$

2. *Existe un no homogéneo proceso de Poisson N en E con medida de intensidad*

$$\mu \left\{ y \in E / \|y\| > r, \frac{y}{\|y\|} \in A \right\} = \frac{H(A)}{r}, \quad \forall r > 0, A \subset S_d,$$

con H una medida finita en S_d que satisface 1, tal que,

$$G(x) = P(N((0, x]^c) = 0) = e^{-\mu\{(0, x]^c\}}$$

3. *Existen f_1, \dots, f_d funciones no negativas e integrables en $[0, 1]$ que cumplen,*

$$\int_0^1 f_j(t) dt = 1, \quad \forall j = 1, \dots, d,$$

tal que

$$G(x) = e^{-\int_0^1 \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{f_j(t)}{x_j} \right) dt}, \quad x \in E.$$

Demostración. Ver (de Haan & Resnick 1977) □

H es llamada la medida espectral, μ la medida exponente y la funciones f_j son nombradas como las funciones espectrales.

Teorema 4 (Marshall-Olkin). *Dada una distribución multivariada F en \mathbb{R}^d , con marginales F_i con $i = 1, 2, \dots, d$ que verifican,*

$$\frac{1 - F_i(x)}{1 - F_1(x)} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Entonces, F está en el dominio de atracción de G con marginales Fréchet si y sólo si, existe una función de escala $b(t) \rightarrow \infty$ y una medida de Radon ν cuando $t \rightarrow \infty$ tal que,

$$tP \left(\frac{X}{b(t)} \in B \right) \rightarrow \nu(B)$$

con B relativamente compacto en $\bar{\mathbb{R}}_+^d$, con $\nu(\partial B) = 0$.

Demostración. Ver (Marshall & Olkin 1983) □

4 Modelización de la Medida Angular (o Medida Espectral)

Esta sección se basa en los trabajos realizados por Boldi y Davison, (Davison & Boldi 2007) y por Sabourin y Naveau, (Sabourin & Naveau 2013).

Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ una v.a en \mathbb{R}^d con marginales Fréchet unitarias. Sea $R = X_1 + \dots + X_d$ la componente radial y $W = X/R$ la componente angular. W tiene su recorrido en el simplex S_d de dimensión $d - 1$, ver figura 3.

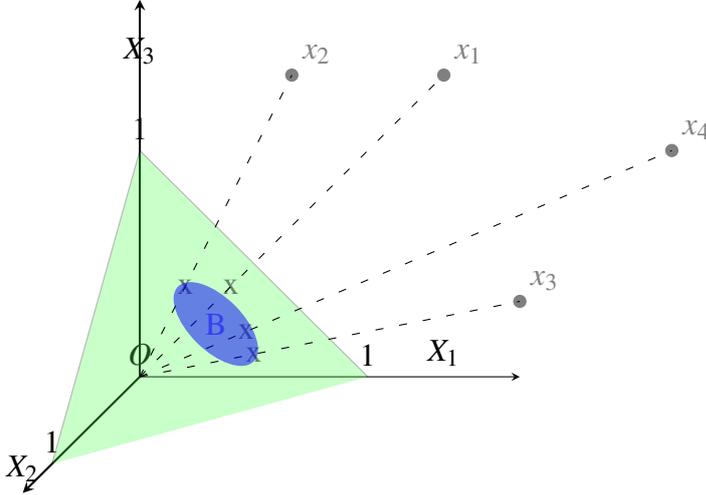


Figura 3: Representación de la variable W en el simplex unitario de \mathbb{R}^3

Bajo ciertas condiciones débiles se puede afirmar que,

$$P(W \in B/R > r_0) \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} H(B), \quad (18)$$

siendo H la medida espectral. H es una medida espectral válida si su centro de masa coincide con el centro del simplex, es decir,

$$\int_{S_d} \omega_i dH(w) = 1/d, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}. \quad (19)$$

La dificultad consiste en estimar H de forma que se verifique la restricción anterior.

4.1 Distribución de Dirichlet.

Dada la distribución de Dirichlet,

$$dir(w/\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\nu)}{\prod_{i=1}^d \Gamma(\nu \mu_i)} \prod_{i=1}^d w_i^{\nu \mu_i - 1}, \quad (20)$$

siendo $\mu \in \text{int}(S_d)$ el parámetro de ubicación y $\nu > 0$ el parámetro de concentración.

Boldi y Davison en el 2007 plantean modelar la densidad espectral a través de una mezcla de distribuciones de Dirichlet,

$$h_{(\mu, p, \nu)}(w) = \sum_{m=1}^k p_m dir(w/\mu_{.,m}, \nu_m), \quad (21)$$

siendo $\mu = (\mu_{.,1}, \dots, \mu_{.,k})$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ y $p = (p_1, \dots, p_k)$, donde μ y p cumplen la siguiente restricción,

$$p_1\mu_{.,1} + \dots + p_k\mu_{.,k} = \left(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}\right).$$

4.2 Estimación en una mezcla de distribuciones Dirichlet mediante un enfoque Bayesiano.

Un problema que se presenta en este punto es la estimación de los parámetros de la mezcla de Dirichlet, se aborda esta dificultad bajo un enfoque bayesiano. El inconveniente radica en generar (p, μ) de forma que se cumpla la restricción,

$$\sum_{m=1}^k p_m\mu_{.,m} = \left(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}\right).$$

4.2.1. Reparametrización del espacio paramétrico sin restricciones.

Trabajo desarrollado por Sabourin y Naveau en el 2013. Sea el espacio paramétrico $\Theta = \biguplus_{k=1}^{\infty} \Theta_k$, siendo

$$\Theta_k = \left\{ (\mu_{.,1:k}, p_{1:k}, v_{1:k}) / \sum_{m=1}^k p_m\mu_{.,m} = \left(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}\right) \right\}.$$

La idea es transformar el espacio paramétrico en un “rectángulo” incluido en $S_d^{k-1} \times (0, 1)^{k-1} \times (\mathbb{R}^+)^k$.

Dado $m \in \{0, \dots, k-1\}$ se introducen ciertas variables intermedias γ_m , centro de masa de las últimas $k-m+1$ componentes,

$$\gamma_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{j=m+1}^k p_j\mu_{.,j}, \quad (22)$$

donde $\rho_j = \sum_{j=m+1}^k p_j$ y $\rho_0 = 1$.

Puesto que γ_m puede ser expresado en función de los términos precedentes,

$$\gamma_m = \frac{1}{\rho_m} \left(\gamma_0 - \sum_{j=1}^m p_j\mu_{.,j} \right), \quad (23)$$

Desarrollando $\gamma_0 = (1/d, \dots, 1/d)$,

$$\gamma_0 = p_1\mu_{.,1} + \sum_{j=2}^k p_j\mu_{.,j} = p_1\mu_{.,1} + \rho_1\gamma_1, \quad (24)$$

se observa que se encuentra en el segmento determinado por γ_1 y $\mu_{.,1}$, sea \mathcal{D}_1 la semirrecta de origen $\mu_{.,1}$ que contiene a γ_1 , y I_1 el punto intersección de \mathcal{D}_1 con el simplex unitario. Existe un único número llamado excentricidad $e_1 \in [0, 1]$ que determina la ubicación de γ_1 en el segmento $[\gamma_0, I_1]$,

$$e_1 = \frac{\|\gamma_1 - \gamma_0\|}{\|I_1 - \gamma_0\|} \quad (25)$$

De la misma manera se plantea $\gamma_1 = p_2\mu_{.,1} + \rho_2\gamma_2$ y se reitera el razonamiento, ver figura 4. Con este argumento recursivo a partir de el vector de medias $\mu_{1,1:k-1}$ y de las excentricidades

$e_{1,k-1}$ es posible obtener los centros de masa $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ y las excentricidades $e_{1;k-1}$ a partir de las ecuaciones,

$$\begin{aligned}\gamma_m &= \gamma_{m-1} + e_m(I_m - \gamma_m) \\ p_m &= \rho_m \frac{\gamma_m - \gamma_{m-1}}{\gamma_m - \mu_{.,m}} \\ \rho_m &= \rho_{m-1} - p_m,\end{aligned}$$

y por definición $\gamma_{k-1} = \mu_{.,k}$ y $p_k = \rho_{m-1}$.

La parametrización esta bien definida si,

$$\gamma_{m-1} \neq \mu_{.,m}, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, k-1\}. \quad (26)$$

para ello basta considerar para los $\mu_{.,m}$ una distribución absolutamente continua.

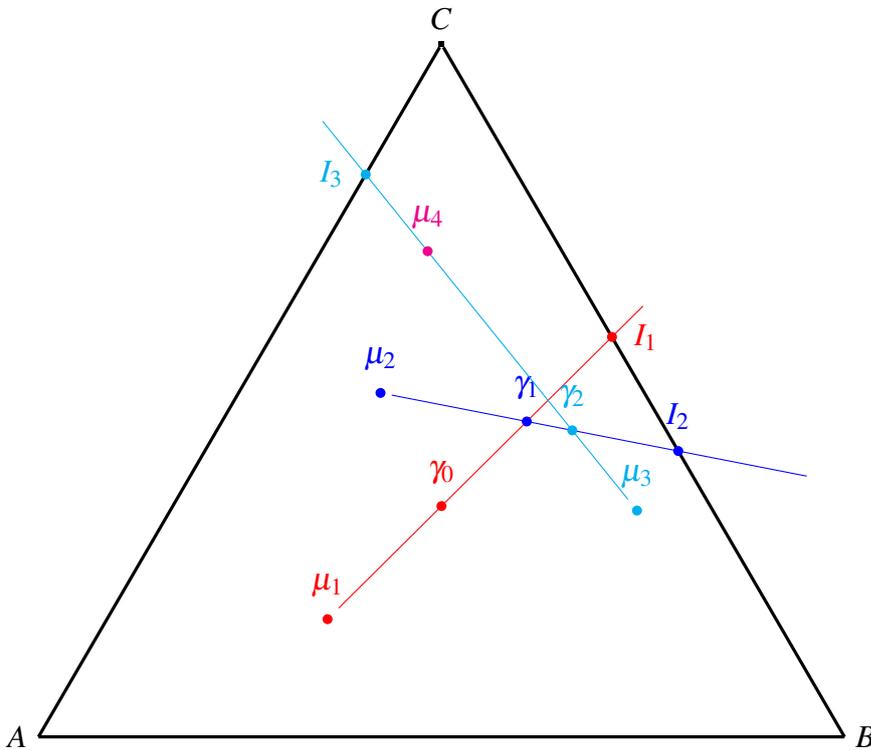


Figura 4: Reparametrización del espacio en dimensión $d=3$ y una mezcla de Dirichlet con $k=4$.

A partir de la reparametrización, el parámetro $\theta = (\mu_{.,1:k-1}, e_{1:k-1}, v_{1:k})$ pertenece a $\Theta = \biguplus_{k=1}^{\infty} \Theta_k$, siendo $\Theta_k = \{(S_d)^{k-1} \times [0, 1]^{k-1} \times (0, \infty]^{k-1}\}$

4.2.2. Modelo Bayesiano

Sea π la distribución a priori, y supongamos que la distribución de v es independiente de (μ, e) condicionada a k . Entonces se puede expresar π como,

$$\pi(k, \mu, e, v) = \pi_k(k) \pi_{\mu, e}(\mu, e/k) \pi_v(v/k). \quad (27)$$

Las distribuciones asignadas a cada uno de los factores son,

- π_k es una distribución geométrica truncada, es decir

$$\pi_k(k) \propto \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{k-1} \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}_{[1, k_{max}]}(k), \quad \lambda > 0$$

- π_v se le asigna distribución log-normal truncada con componentes independientes, es decir,

$$\pi_{v,j} \propto \mathbf{1}_{[v_{min}, v_{max}]} \log N(m_v, \sigma_v^2), \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

y la distribución de v es la medida producto $\pi_v = \otimes_{j=1}^k \pi_{v,j}$.

- La distribución de $\pi_{\mu,e}(\cdot/k)$ es dada por sucesivas condicionales,

$$\pi_{\mu,e}(\mu, e/k) = \prod_{m=1}^{k-1} \pi_{\mu_m}(\mu_{\cdot,m}/k, \mu_{\cdot,1:m-1}, e_{1:m-1}) \pi_{e_m}(e_m/k, \mu_{\cdot,1:m}, e_{1:m-1}),$$

donde por definición $\mu_{\cdot,1:0} = \{\gamma_0\}$ y $e_{1:0} = \emptyset$.

En este caso se considera

$$\pi_{\mu_m}(\cdot/\mu_{\cdot,1:m-1}, e_{1:m-1}) = \text{diri}\left(\cdot/\gamma_m, \frac{\chi_\mu}{\min_{1 \leq i \leq d} \{\gamma_{i,m}\}}\right),$$

donde χ_μ es un hiper parámetro de concentración.

En la figura 5 se puede apreciar el esquema bayesiano para simular valores de una mezcla de distribuciones de Dirichlet. Un ejemplo de 1000 simulaciones en una mezcla de distribuciones de Dirichlet con uno y dos centros, así como las respectivas curvas de nivel de las distribuciones se ilustran en la figura 6.

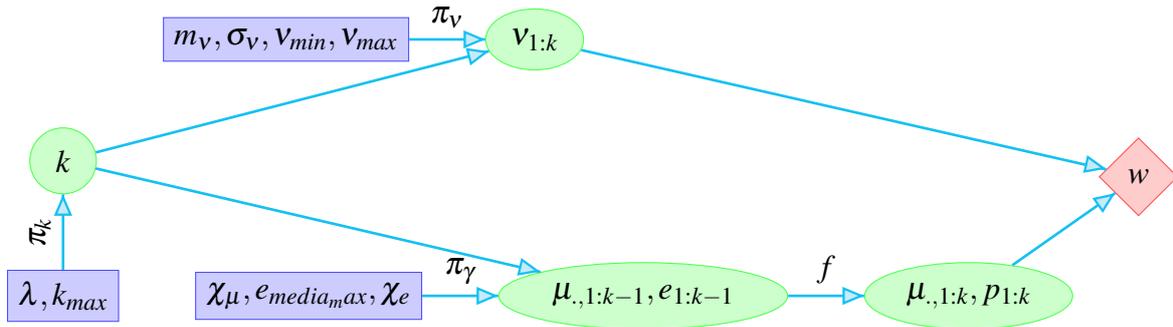


Figura 5: Esquema de la simulación bayesiana de un valor de la distribución de Dirichlet.

5 MCMC con salto reversible (RJMCMC)

El método de Montecarlo vía cadenas de Markov es usado para simular valores de la distribución a posteriori, es decir

$$\pi(\theta/y) \propto L(y/\theta)\pi(\theta)$$

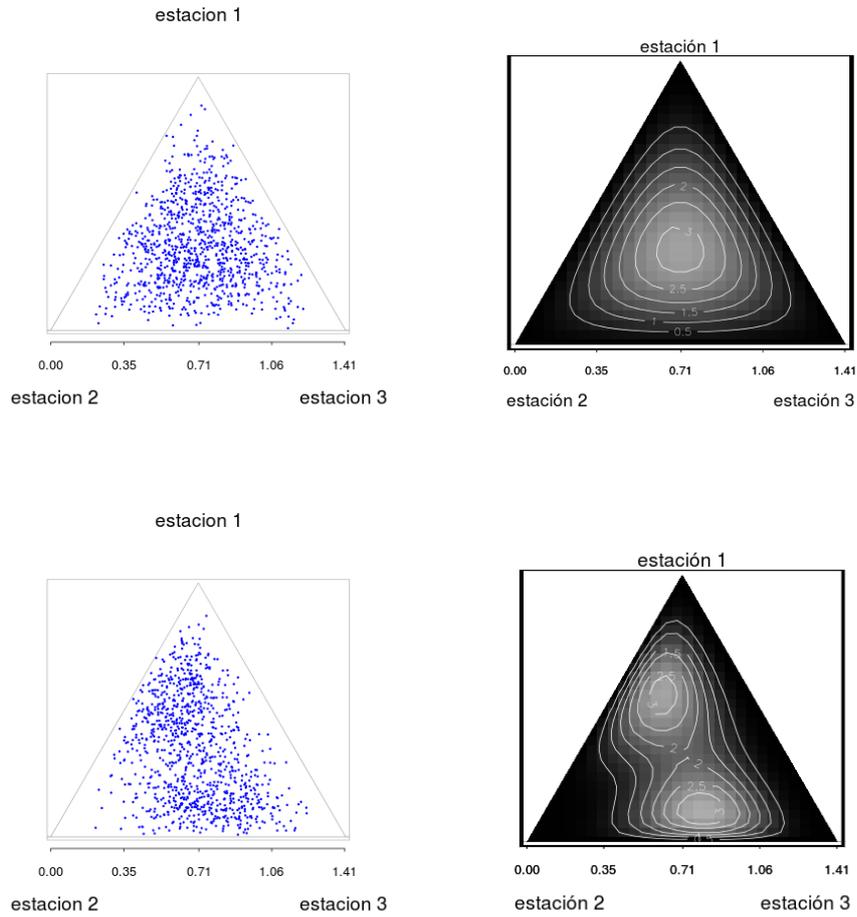


Figura 6: Simulación de 1000 valores de una distribución de Dirichlet y de una mezcla de dos distribuciones de Dirichlet con las respectivas curvas de nivel de sus densidades.

La idea consiste en generar una cadena de Markov cuya distribución estacionaria sea aquella a posterior que queremos describir. En nuestro caso “una de las cosas que desconocemos es el número de cosas que desconocemos”. Green en 1995 propone el algoritmo MCMC con salto reversible (RJMCMC), donde los estados de la cadena “viven” en subespacios \mathcal{M}_k de distinta dimensión p_k .

5.1 Algoritmos

En esta sección se enumeran los pasos de aquellos algoritmos usados para generar la cadena estacionaria requerida, ver (Chen, Shao & Ibrahim 2000).

5.1.1. Metropolis-Hastings

Paso 0 Elegir un punto de partida θ_0

Paso 1 Generar un valor θ^* a partir de una densidad propuesta $q(\theta_i, \cdot)$ y un valor u de $U \sim U(0, 1)$.

Paso 2 Tomar $\theta_{i+1} = \theta^*$ si $u \leq a(\theta_i, \theta^*)$ y $\theta_{i+1} = \theta_i$ en otro caso, siendo,

$$a(\theta, \vartheta) = \min \left\{ \frac{\pi(\vartheta|y)q(\vartheta, \theta)}{\pi(\theta|y)q(\theta, \vartheta)}, 1 \right\}$$

Paso 3 Considerar $i = i + 1$ y volver al paso 1

5.1.2. Algoritmo RJMCMC

Paso 0 Elegir un punto de partida $(k_0, \theta^{(k_0)})$

Paso 1 Proponer un modelo \mathcal{M}_{k^*} con probabilidad $j(k^*|k)$

Paso 2 Generar un valor u a partir de una densidad propuesta $q(u|\theta^{(k)}, k, k^*)$

Paso 3 Sea $(\theta^{*(k^*)}, u^*) = g_{k,k^*}(\theta^{(k)}, u)$ donde g_{k,k^*} es una biyección, por tanto, $p_k + \dim(u) = p_{k^*} + \dim(u^*)$

Paso 4 Saltar a $(k^*, \theta^{*(k^*)})$ con probabilidad,

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{p(k^*)\pi^*(\theta^{*(k^*)}|y, \mathcal{M}_{k^*})j(k|k^*)q(u^*|\theta^{*(k^*)}, k^*, k)}{p(k)\pi^*(\theta^{(k)}|y, \mathcal{M}_k)j(k^*|k)q(u|\theta^{(k)}, k, k^*)} \left| \frac{\partial g_{k,k^*}(\theta^{(k)}, u)}{\partial(\theta^{(k)}, u)} \right| \right\}$$

siendo $\pi^*(\theta^{(k)}|y, \mathcal{M}_k) = L(\theta^{(k)}|y, \mathcal{M}_k)\pi(\theta_k|\mathcal{M}_k)$

5.1.3. Algoritmo Metropolis para mezclas de Dirichlet (M-DM)

Tres tipos de movimientos posibles elegidos al azar con probabilidades p_1 , p_2 y p_3 .

■ Movimiento Regular.

Dado $\theta_t = (\mu_{\cdot,1:k-1}, \mu_{\cdot,1:k-1}, \nu_{1:k}) \in \Theta_k$ existen $3k - 2$ movimientos posibles,

- (**v-movimientos**) Afectan una componente $v_m(t)$ de $v(t)$, donde

$$q_v(v_m(t), v_m^*) \sim \text{LogNormal con media } \log(v_m(t))$$

- (**e-movimientos**) Afectan una componente $e_m(t)$ de $e(t)$, donde

$$q_v(e_m(t), e_m^*) \sim \text{beta},$$

con moda $e_m(t)$ y parámetros,

$$a_1 = 1 + \frac{2(1-\varepsilon_e^*)}{\varepsilon_e^*} e_m(t) \text{ y } a_2 = 1 - \frac{2(1-\varepsilon_e^*)}{\varepsilon_e^*} e_m(t)$$

(en este paso son afectados los $\mu_{\cdot,k}^*$ según la reparametrización.

- (**μ -movimientos**) Afecta una o de los primeros $(k - 1)$ -vectores media.

La subsucesión de pesos $p_{m:k}^*$ y el último vector son modificados según la reparametrización. Se propone para $\mu_{\cdot,m}^*$ una mezcla de dirichlet con densidad $q_\mu(\mu_{\cdot,m}(t), \cdot)$.

La probabilidad de aceptación en un movimiento regular es dada por,

$$r(e_m(t), e_m^*) = \min \left(1, \frac{h_{\theta^*}(w_{1:n})\pi(\theta^*)q_e(e_m^*, e_m(t))}{h_{\theta_t}(w_{1:n})\pi(\theta_t)q_e(e_m(t), e_m^*)} \right)$$

■ Movimiento trans-dimensional. Dos tipos

- **Movimiento de división.** Se genera un nuevo vector $\mu_{.,k}^*$ en un entorno de $\mu_{.,k}(t)$ y e_k^* según la apriori. Se deduce $\mu_{.,k}^*$ a partir de la reparametrización.
- **Movimiento de combinación.** Se remueve la última componente

Las probabilidades de aceptación son,

$$r_{div} = \min \left\{ 1, \frac{h_{\theta^*}(w_{1:n})\pi(\theta^*)p_{comb}(k+1)}{h_{\theta_t}(w_{1:n})\pi(\theta_t)p_{div}(k+1)} [q_{\mu,div}(\theta_t, \mu_{.,k}^*)q_{e,div}(\theta_t, e_k^*|\mu_{.,k}^*)q_{v,div}(\theta_t, v_{k+1}^*)]^{-1} \right\}$$

$$r_{comb} = \min \left\{ 1, \frac{h_{\theta^*}(w_{1:n})\pi(\theta^*)p_{div}(k-1)}{h_{\theta_t}(w_{1:n})\pi(\theta_t)p_{comb}(k)} [q_{\mu,div}(\theta^*, \mu_{.,k})q_{e,div}(\theta^*, e_k|\mu_{.,k})q_{v,div}(\theta^*, v_k(t))] \right\}$$

■ **Movimiento “Shuffle”.**

No afecta la densidad h_{θ} pero aumenta la velocidad de convergencia del algoritmo.

Teorema 5. *El algoritmo M-DM genera una cadena de Markov aperiódica, η -irreducible que admite la distribución a posteriori π_n como una invariante medida de probabilidad*

6 Datos Reales

Guanajuato es uno de los 31 estados de México, ubicando en el centro del país entre latitudes $19^{\circ}55'08'' - 21^{\circ}52'09''$ y longitudes $99^{\circ}41'06'' - 102^{\circ}09'07''$. Presenta una extensión territorial de 30941 km^2 y 5.486.372 habitantes. Cuenta con 41 Municipios y la capital recibe el mismo nombre que el Estado, ver figura 7.



Figura 7: Ubicación del Estado de Guanajuato en México y densidad poblacional.

Se presume que la fisonomía de las sierras y montañas, ver figura 8, así como la circulación de los vientos afectan de forma directa la distribución de las precipitaciones en el Estado.

Debido a la fertilidad de gran parte de sus suelos, se ha caracterizado por su producción agrícola. Un tercio de las tierras son cultivables, cuyo riego se realiza por gravedad o por bombeo de acuíferos subterráneos, ver figura 8. Estos sectores fértiles, al igual que la mayoría de los poblados, se encuentran sobre la zona sur del Estado, pues el norte es un territorio semiárido como se puede apreciar en el mapa de las isoyetas de la figura 9, lo que conlleva que las estaciones meteorológicas con mayor número de años en funcionamiento y datos registrados se encuentren en el sur de Guanajuato.

El clima se corresponde a la latitud donde se encuentra ubicado Guanajuato y a su lejanía del mar. Como se puede apreciar en la figura 10 las precipitaciones promedio mensuales se presentan en mayor magnitud en los meses de junio, julio y agosto. Los meses de noviembre, diciembre, enero y febrero corresponden a un período extremadamente seco, aunque es posible

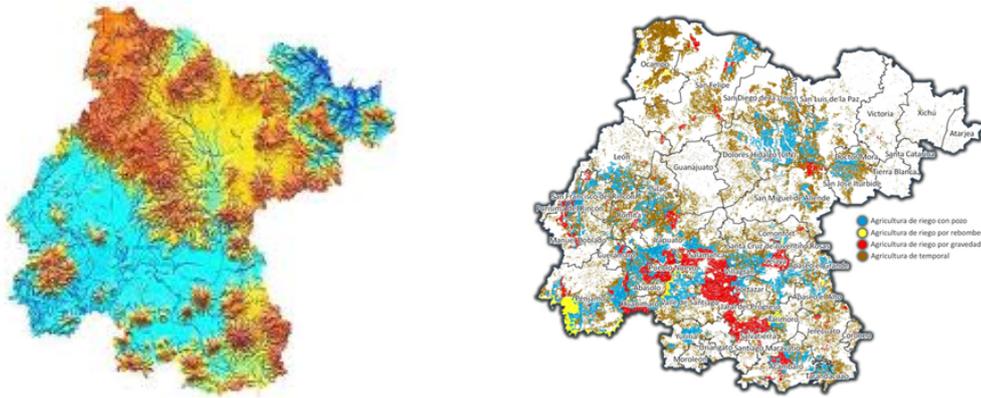


Figura 8: Mapa orográfico y mapa agrícola del Estado de Guanajuato.

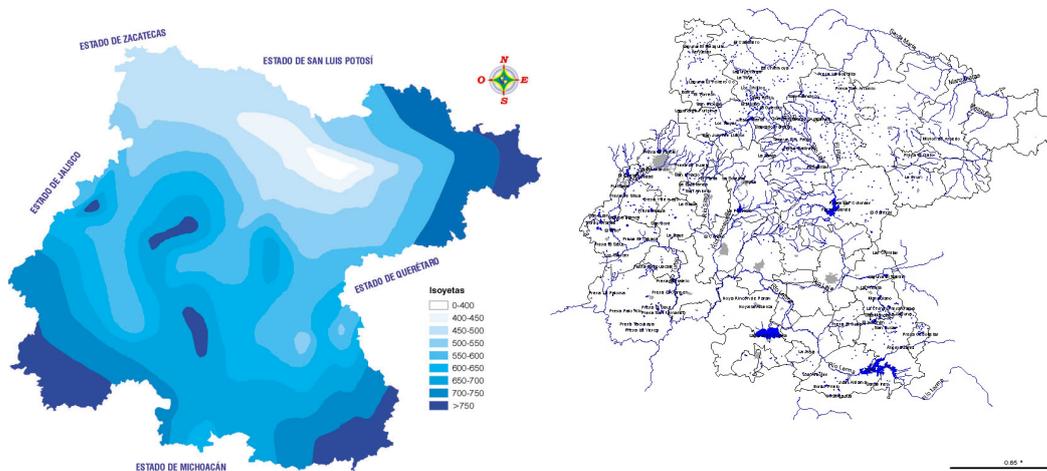


Figura 9: Isoyetas y mapa hidrográfico del Estado de Guanajuato.

que se registren lluvias extremas en este lapso por determinados fenómenos atípicos, como por ejemplo provocadas por un huracán.

La topografía particular de Guanajuato determina que lluvias de un alto caudal provoquen daños nefastos tanto en la producción agrícola como en las viviendas de sus habitantes, ocasionando inclusive pérdidas humanas. Los ríos que atraviesan el estado, ver figura 9, aumentan de forma abrupta su caudal en presencia de lluvias extremas. Hay datos históricos de severas inundaciones en el Estado, por ejemplo en los años 1700, 1780, 1873 y 1905.²

Ejemplos mas recientes son las inundaciones de agosto de 1973 en el estado de Irapuato, por lluvias durante quince días que superaron los 300 mm en pocos días, ver figura 11, provocando el desborde del río Llave, ocasionando pérdidas humanas y cuantiosos daños materiales. En julio de 1976, el estado de Silao sufrió una severa inundación por lluvias que superaron los 483 mm, ver figura 11, provocando el desborde del río Silao y destruyendo extensas áreas de cultivo y sumergiendo a la ciudad 1,40 mts del nivel del suelo. También en esta fecha el desborde del Río Turbio afectó un alto número de Municipios. Asimismo en el 2003 y en el 2007 todo el estado se vio afectado por lluvias extraordinarias produciéndose pérdidas de todo tipo³, ver

²Fuente: “El agua en la ciudad de Guanajuato, problema de siglos”, Gobierno del Estado de Guanajuato, Secretaría de Programación, 1983, Guanajuato, Gto. México.

³Datos extraídos del Programa Estatal de Cambio Climático, Guanajuato.

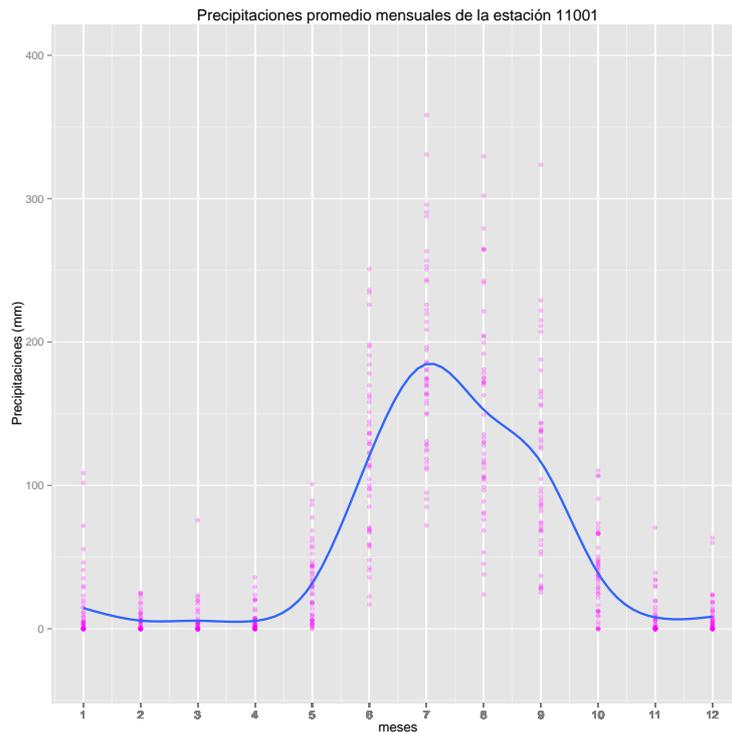


Figura 10: Estimación de la componente estacional de la estación 11001 ubicada en el municipio de Abasolo, entre los años 1963 y 2011.

figura 11.

Por tanto es fundamental establecer, en la medida de lo posible, probabilidades de ocurrencia de estos hechos, así como definir posibles zonas de riesgo para poder establecer políticas de prevención adecuadas.

6.1 Descripción de la Base de Datos.

La base de estaciones meteorológicas y los registros diarios de lluvias fueron proporcionados por la Coordinación General del Servicio Meteorológico Nacional de México, dependiente de la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). La base de datos cuenta con 160 estaciones meteorológicas, que registran caudales diarios de lluvias en milímetros en períodos que van desde el año 1902 al 2012. Las estaciones se dividen en dos grupos, según como es tomada la lectura del pluviómetro, ver figura 12,

convencionales La medición es registrada cada día por una persona.

automáticas El pluviómetro registra la medición sin ayuda externa.

Un problema de elevada complejidad en el análisis estadístico es el alto número de datos faltantes. Una gran cantidad de estaciones funcionaron por determinados períodos de años, y en ciertos lapsos (meses o años) no presentan presentan datos. Inclusive dentro de cada mes hay días en los que no se cuenta con la información.

6.2 Algunos supuestos y elección de las estaciones.

El tipo de clima tropical hace suponer válida la hipótesis de independencia entre los valores de precipitaciones diarios dentro de cada año, o al menos un condición de m -independencia

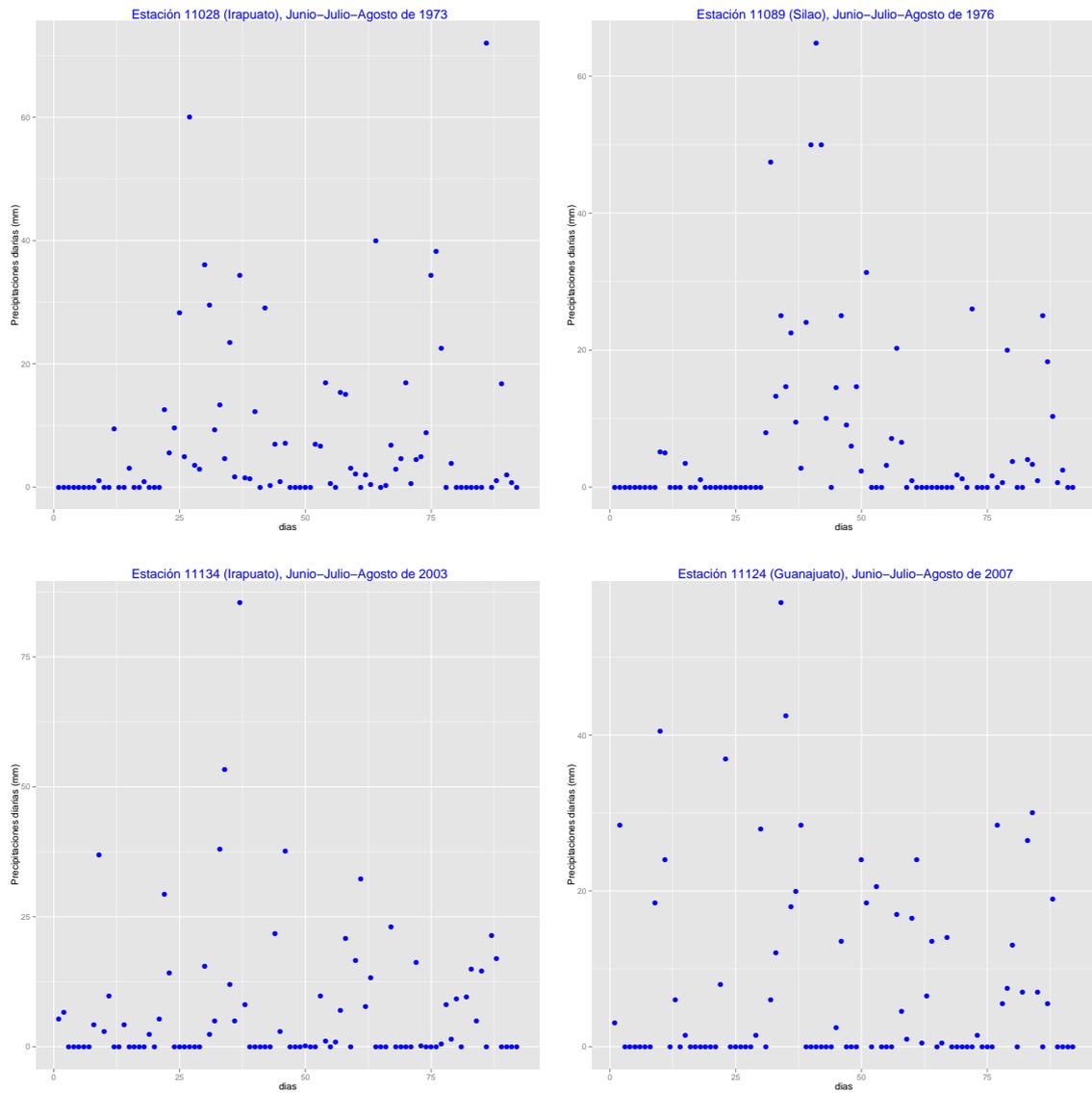


Figura 11: Precipitaciones diarias (mm) de los meses de junio, julio y agosto en distintos puntos del Estado de Guanajuato en años donde sucedieron inundaciones.

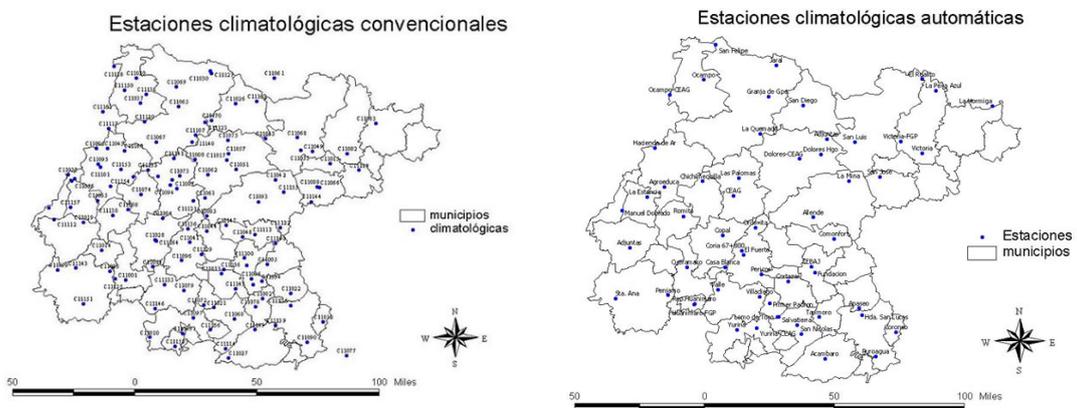


Figura 12: Ubicación de las estaciones meteorológicas en el Estado de Guanajuato.

siendo m una determinada longitud de tiempo, pero es claro a partir de la figura 10 que no se puede suponer equidistribución. Dos caminos son plausibles, uno es eliminar la componente estacional y trabajar con la serie de todos los días del año con lo cual ganamos información pero perdemos interpretabilidad. El camino a seguir en la tesis es dividir el año en tres períodos,

Seco Noviembre, Diciembre, Enero, Febrero y Marzo.

Moderado Abril, Mayo, Septiembre y Octubre.

Lluvioso Junio, Julio y Agosto.

Obviamente el período de mayor importancia es el tercero. La ventaja de no tomar períodos mensuales es obtener mayor cantidad de datos por año lo que genera un mejor ajuste de las distribuciones de valores extremos marginales. También se supone independencia de la sucesión de máximos tomados para cada año en el lapso analizado, es decir, no se tiene en cuenta un posible cambio climático.

7 Resultados Locales

Se entiende por resultados locales aquellos que comprenden una pequeña región y un número reducido de estaciones. A modo de ejemplo se analiza el período Junio-Agosto.

Se seleccionan 3 estaciones cercanas del Municipio de León, con un alto número de observaciones.

11020, 11040, 11095.

En la figura 13 se observa la ubicación de las estaciones, para tener una perspectiva de las distancias la estación 11040 y 11095 se encuentran aproximadamente a 10 km. Los años que comparten estas 3 estaciones son 50 ,

1961, 1962, 1963, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011.

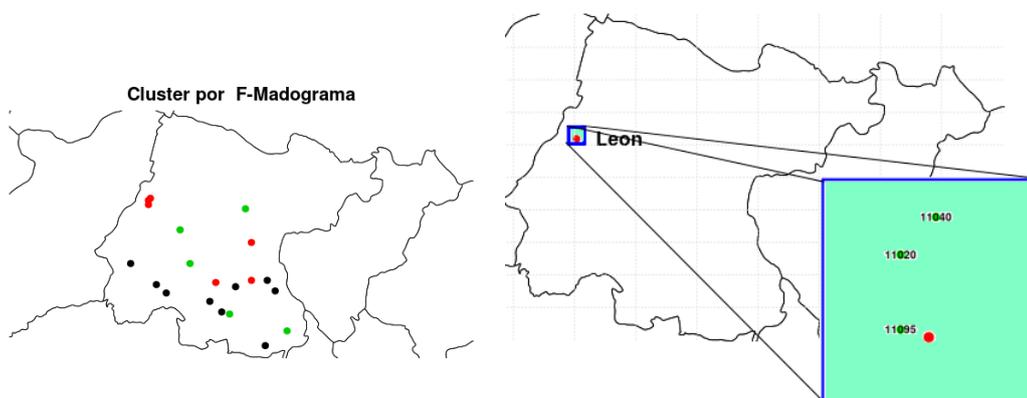


Figura 13: Ubicación de las estaciones en León.

En la figura 14 puede apreciarse que la cercanía de las estaciones no conlleva a un comportamiento similar, como el esperado, entre los máximos anuales .

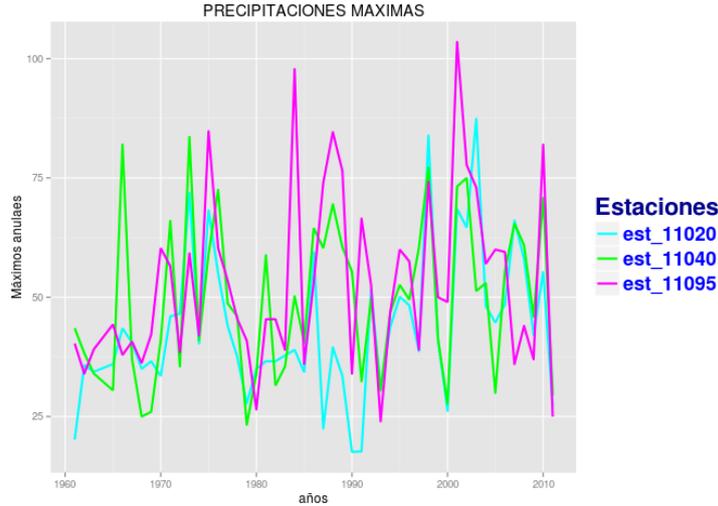


Figura 14: Precipitaciones máximas en 50 años en el período junio-agosto.

7.0.1. Modelización y predicción

Las estaciones 11020, 11040 y 11095 presentan 4650 días comunes con observaciones de precipitaciones diarias, ver figura 15.

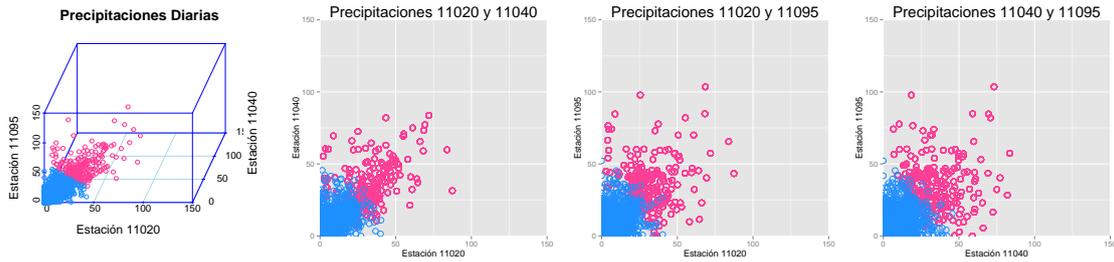


Figura 15: Precipitaciones diarias mensuales en el período junio-agosto de las estaciones 11020, 11040 y 11095. Se diferencian el 95% de las observaciones extremas según la distancia L_1 en \mathbb{R}^3

Se modelan los datos al igual que en Cooley, Naveau y Davis, (Naveau, Cooley & Davis 2010), se estima para marginal la acumulada \hat{F} , modelando el 70% inferior de los datos a través de la distribución empírica F^* y la cola superior a través de la distribución generalizada de Pareto. A partir de la F estimada se transforman los datos a una Fréchet unitaria y se seleccionan aquellas 200 observaciones de mayor norma en L_1 , aproximadamente el 5% del total de la muestra.

$$\hat{F}_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - \{1 - F_{X_i}^*(u_{X_i})\} \{1 + \kappa(x - u_{X_i})/\beta_i\}_+^{-1/\kappa} & \text{si } x > u_{X_i} \\ F_{X_i}^*(x) & \text{si } x \leq u_{X_i} \end{cases}$$

siendo u_{X_i} el cuantil 0,7.

A partir de la distribución asintótica y de la homogeneidad de la medida ν ,

$$P(X \in A) \simeq \nu(A) = \int_{rw \in A} \frac{dr}{r^2} dH(w)$$

Si se considera como $A = \{X_1 > u_1, X_2 > u_2, X_3 > u_3\}$ y el modelo paramétrico,

$$P_\theta(X \in A) \simeq \int_{rw \in A} \frac{dr}{r^2} dH_\theta(w) = \int_{S_d} \min_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{w_j}{u_j} \right\} h_\theta(w) dw$$

Por tanto obtenemos una aproximación de la distribución predictiva a posterior,

$$P_\theta(X \in A/w_1, \dots, w_n) \simeq \int_{\Theta} \int_{S_d} \min_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{w_j}{u_j} \right\} h_\theta(w) dw d\pi_n(\theta)$$

y mediante doble-Montecarlo se estima la probabilidad a posteriori de pertenecer al conjunto,

$$P_\theta(X \in A/w_1, \dots, w_n) \simeq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{w_{i,j}^t}{u_j} \right\} \quad w_i^t \sim h_{\theta(t)}$$

En el cuadro 1 se estiman, mediante la distribución geométrica, las probabilidades a posteriori de superar cierto umbral en las tres estaciones simultáneamente, en determinado período de tiempo.

Cuadro 1: Predicciones a posteriori en el período junio-agosto.

período (años)	Junio – Agosto	
	$P_\theta(A w)$ umbrales de 100 mm	$P_\theta(A w)$ umbrales de 150 mm
10	0.60	0.03
20	0.74	0.10
30	0.89	0.15
40	0.97	0.185
50	0.99	0.244

Los resultados obtenidos demuestran que es de esperar, en períodos de tiempo no muy extensos, precipitaciones extremas que provoquen severas inundaciones en la región. En este contexto, es sustentable la idea que el patrimonio histórico de México en el Estado de Guanajuato sigue en riesgo latente, futuras inundaciones y deslizamientos son plausibles a mediano plazo. Es necesario, consolidar los sistemas de información y alerta de fenómenos meteorológicos e hidrometeorológicos, apoyar la implementación de planes de prevención y atención de inundaciones a nivel de cuenca hidrológica y la protección de los habitantes en zonas de alto riesgo de inundación.

Referencias

- Bras, R. & Rodriguez-Iturbe, I. (1994), *Random Functions and Hydrology*, Dover Publications, Incorporated.
- Chen, M., Shao, Q. & Ibrahim, J. (2000), *Monte Carlo Methods in Bayesian Computation*, Springer.
- Coles, S. (2001), *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer Series in Statistics.

- Davison, A. & Boldi, M. (2007), ‘A mixture model for multivariate extremes’, *Journal of the Royal Statistical Society* **69**, 217–229.
- Davison, A., Padoan, S. & Ribatet, M. (2012), ‘Statistical modelling of spatial extremes’, *Statistical Science* **27(2)**, 161.
- de Haan, L. & Ferreira, A. (2006), *Extreme Value Theory, An Introduction*, Springer.
- de Haan, L. & Resnick, S. (1977), ‘Limit theory for multivariate sample extremes’, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **40(4)**, 317–337.
- Gnedenko, B. (1943), ‘Sur la distribution limite du terme maximum d ’ une serie aleatore’, *Annals of Mathematics* **44**, 423–453.
- González, E. M. (2011), Análisis de máximos para datos espaciales de lluvias, Master’s thesis, Cimat.
- Kluppelberg, C., Steinkohl, C. & Davis, R. (2013), ‘Statistical inference for max-stable processes in space and time’, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* **75(2)**.
- Marshall, A. W. & Olkin, I. (1983), ‘Domains of attraction of multivariate extreme value distributions’, *Annals of Probability* **11**, 168–177.
- Naveau, P., Cooley, D. & Davis, R. (2010), ‘The pairwise beta distribution: A flexible parametric multivariate model for extremes’, *Journal of Multivariate Analysis* **101**, 2103–2117.
- Quintero, F. L. (2010), Estudio de la distribución espacial de valores máximos para datos de lluvia, Master’s thesis, Inst. Venezolano de Inv. Cient.
- Ribatet, M. (2013), ‘Extreme value copulas and max-stable processes’, *Journal of Societe Francaise de Statistique* **special edition on copulas**.
- Sabourin, A. & Naveau, P. (2013), ‘Bayesian dirichlet mixture model for multivariate extremes: a re-parametrization’, *Computational Statistics and Data Analysis* (**submitted**).
- Tippett, L. & Fisher, R. A. (1928), ‘Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample’, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **24**, 190–190.